Polinomios en R[x] - Función Polinómica

1. Indicar cuáles de las siguientes expresiones son polinomios:

   a) $A(x) = \frac{1}{2}x^3 - 6x + \sqrt{3}$

   b) $B(x) = x^{-3} - 6x^2$

   c) $C(x) = 2x^{\frac{1}{2}} + x + 1$

   d) $D(x) = 2^x + x + 3$

2. Determinar el grado y el término independiente de los siguientes polinomios:

   a) $P(x) = x^5 - 2x + 1$
   b) $Q(x) = x + 3x^8 + 2x^3 - 3x - 4$
   c) $M(x) = (3x-2)^2$
   d) $N(x) = (3x-2)^2.(x+5)$
   e) $S(x) = (3x-2)^2.(x+5).x^3$
   f) $T(x) = 6(x+2)^3.(2x+5).(x-1)^5$

3. Hallar en cada caso el cociente y el resto de P(x) : Q(x).

   a. $P(x) = 3x^3 - x^2 + 5x - 4 \quad Q(x) = x^2 - 3x + 2$
   b. $P(x) = 12x^3 + 6x - 5 \quad Q(x) = 4x^2 + 3$
   c. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 \quad Q(x) = 3x^2 + x$
   d. $P(x) = 2x^3 + 4x^2 + 7x + 3 \quad Q(x) = 2x^2 + x + 3$
   e. $P(x) = 12x^3 - 28x^2 - 13x + 39 \quad Q(x) = 6x^2 + x - 8$

4. Hallar en cada caso el cociente y el resto de P(x) : Q(x).

   a. $P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x + 1 \quad Q(x) = x - 3$
   b. $P(x) = x^4 - 2 \quad Q(x) = x + 1$
   c. $P(x) = 3x^3 + 7x^2 + 6x - 1 \quad Q(x) = x + 2$

5. En una división de polinomios, el divisor es $P(x) = 2x^4 + x^2 + 3x$, el cociente $C(x) = 2x^2 + x - 1$ y el resto $R(x) = 3x - 4$. Determinar el polinomio dividendo.

6. Si el resto de la división $\left(x^4 + 3x^2 + mx + p\right) : \left(x^2 + x - 2\right)$ es 4x.
   Hallar el valor de ***m* + *p***.

7. Determinar a y b, sabiendo que si se divide $P(x) = 2x^2 + ax + b$ por $Q(x) = x - 2$, da por cociente $C(x) = 2x - 1$, y como resto 0.

8. Demostrar el siguiente Teorema:

TEOREMA DEL RESTO: "Sea P, un polinomio de grado mayor o igual a uno, el resto $\{P(x):(x-a)\}=P(a)$ **"**

9. Analizar en cada caso, si el polinomio P es divisible por el polinomio Q.

    a. $P(x)=2x^{111}+x^{50}-2x-1 \qquad Q(x)=x+1$
    b. $P(x)=x^{6}-2x^{3}+5 \qquad Q(x)=x-\sqrt[3]{5}$

10. Hallar $a\in\mathbb{R}$, de modo tal que el polinomio $T(x)=-2x^{2}+3x+14$ sea divisible por $U(x)=x-a$.

11. Hallar $a\in\mathbb{R}$, de modo tal que al dividir $P(x)=2x^{3}+4x^{2}-2x+a$ por $Q(x)=x-3$, se obtenga 10 como resto.

12. Sabiendo que el polinomio $P(x)=ax^{3}-2x^{2}+bx+2$ es divisible por el polinomio (x - 1) y que el resto de dividir P por (x - 2) es 24, hallar a y b.

13. Si el resto de dividir el polinomio $f(x)=ax^{5}+bx^{3}+cx-8$ por $(x+3)$ es 6, determine, el resto de dividir f(x) por (x – 3).

14. Demostrar el siguiente teorema:

TEOREMA DEL FACTOR: "c es raíz del polinomio P si y sólo si x – c es un factor de P"

15. En cada caso, encontrar, si es posible, un polinomio que verifique las condiciones dadas:
    a. P es de grado 3 y sus raíces son: -1, 2 y 3.
    b. Q es de grado 3, sus raíces son: -1, 2 y 3 y Q(0) = - 2.
    c. Las raíces de R son: 1; 2 y 3, su grado es 4 y $R(-1)=4$.
    d. Tenga grado mínimo y sus raíces sean: 0 y 2.

16. Dado el polinomio $P(x)=x^{2}\left(x+3\right)(x+5)$, se pide:
    a. Escribir cuatro polinomios de grado 2 que dividan a P.
    b. Decidir si el polinomio $x^{2}-25$ divide a P.
    c. Escribir todos los polinomios mónicos de grado 3 que dividen a P.
    d. Decidir si el polinomio $x^{2}+3x$ divide a P.

17. Proponer dos polinomios mónicos diferentes, de grado 3, cuya única raíz real sea -5.

18. Decidir si el polinomio $x^{3}+5x^{2}-x-5$ cumple con las condiciones del ejercicio anterior.

19. Sea $P(x) = x^3 - 7x - 6$

   a. Determinar si x +1 y x+2 son factores de *P*.
   b. Justifique la posibilidad de escribir al polinomio P de la forma $P(x) = (x+1)(x+2).Q(x)$. ¿De qué grado es el polinomio Q? Hallar Q.
   c. Hallar todas las raíces de *P*.
   d. Escribir la expresión factorizada de P y dar sus raíces.
   e. Describa dos procedimientos diferentes que permitan justificar si el polinomio $x^2 - 2x - 3$ divide a P.

20. Sea $P(x) = 2x^3 - 14x - 12$

   a. Determinar si x +1 es un factor de *P*.
   b. Justifique la posibilidad de escribir al polinomio P en la forma $P(x) = (x+1).M(x)$. ¿De qué grado es el polinomio M? Hallar M.
   c. Hallar todas las raíces de *P*.
   d. Escribir la expresión factorizada de *P*.
   e. ¿El polinomio $Q(x) = 2x^2 - 4x - 6$, divide a *P*?

21. Sea $P(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 + x - 12$

   a. Demuestre que el polinomio $x^2 + 1$ es un factor de P.
   b. Hallar todas las raíces reales de *P*.
   c. Escribir dos polinomios mónicos de grado 3, que dividan a P.
   d. ¿Existe un polinomio de grado 3, que divida a P y tenga dos raíces reales.

22. Encontrar en cada caso dos polinomios que cumplan simultáneamente:

   a. Grado 3 ; -4 es la única raíz real; el resto al dividirlo por $x-1$ es 2 .
   b. Grado 4; mónico; las raíces son 0 y -1; el resto de dividirlo por x^2 no es 0.

23. Dar la expresión del polinomio P mónico de grado 3, cuya única raíz es 1, el resto de dividirlo por $(x-1)^2$ no es 0 y P(2) = 9

24. Escribir los siguientes polinomios como producto de polinomios primos.

   a) $x^2 + x - 2$
   b) $-3x^2 + 6x + 45$
   c) $\frac{5}{3}x^2 + \frac{10}{3}x - 5$
   d) $x^3 + 3x^2 + 2x$
   e) $x^4 + x^3 - 6x^2$
   f) $x^2 - 4$
   g) $3x^2 - \frac{1}{3}$

h) $\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4}x^2$
i) $3x^4 - 5x^3 - 2x^2$
j) $8x^4 - 2x^2$
k) $3x^4 + 9x^2$
l) $x^3 + 1$
m) $x^3 - 8$
n) $x^4 - x$
o) $(x^2 - 4)(x^3 + 1)$
p) $x^3 + x^2 - 4x - 4$
q) $x^4 - x^3 + 8x - 8$
r) $-3x^4 - 3x^3 + 12x^2 + 12x$
s) $x^4 - 13x^2 + 36$
t) $x^4 - 5x^2 + 4$
u) $2x^4 + 14x^2 + 24$
v) $x^6 - 7x^3 - 8$
w) $4x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 9x$
x) $x^3 + x^2 - \frac{9}{4}x - \frac{9}{4}$
y) $x^3 + 3x^2 - 4x$
z) $O(x) = x^3 + x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$, siendo $O\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.
aa) $Q(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$; -2 y 1 son raíces de *Q*.
bb) $M(x) = 3x^3 - x^2 - 9x + 3$; siendo $x - \frac{1}{3}$ un factor de *M*.
cc) $T(x) = 3x^5 - x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 3x - 1$, *T* es divisible por $x^2 + 1$

25. Enunciar el Teorema de Gauss.

26. Dado el polinomio: $P(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - \frac{11}{2}x + 3$ ¿Se puede aplicar el teorema de Gauss?
Aplicar el teorema de Gauss al siguiente polinomio: $S(x) = x^4 - 5x^2 + 6$ y sacar conclusiones.

27. Factorizar los siguientes polinomios:

$A(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
$B(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$
$C(x) = x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 52x - 48$
$D(x) = 3x^3 - 20x^2 + 27x - 10$
$I(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$

28. Hallar el conjunto de positividad de las siguientes funciones polinómicas:

$h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,h(x)=-2.(x-2)^2.(x+5)$

$m:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,m(x)=3\left(x-1\right).(x+3)^4\left(x+2\right)^3$

$g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,g(x)=2x^3+x^2-13x+6$

$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,f(x)=x^4-6x^3+13x^2-12x+4$

29. Hallar $x\in\mathbb{R}\,/\,h(x).g(x)>0$, siendo h y g las funciones definidas en el ejercicio anterior.

30. Hallar, en cada caso, las coordenadas de los puntos de intersección de los gráficos de las funciones:

a) $j:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,j(x)=-x^3+2x^2+6$ $\quad p:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,p(x)=-2x^3-x^2+9x+1$

b) $j:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,j(x)=3x^3+6x^2-\frac{3}{2}$ $\quad p:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,p(x)=x^3+\frac{1}{2}x$

31. Hallar el conjunto solución de la siguientes inecuaciones (Sugerencia: Construya un gráfico aproximado de los polinomios que aparecen en el miembro izquierdo de la desigualdad)
    a) $\left(x+2\right).\left(x-\frac{1}{2}\right).x\leq 0$
    b) $-3\left(x-1\right)^2.\left(x-2\right).\left(x+3\right).x\geq 0$
    c) $2x^3+9\leq 18x+x^2$
    d) $-2x^4-x^3+3x^2>0$
    e) $x^3+2x\leq 3x^2+6$

32. Proponer la expresión de una función polinómica B de grado 3, con las mismas raíces de $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\,P(x)=x^4-x^3+8x-8$ y $C^-(B)=\left(1,+\infty\right)$.

33. Hallar la expresión de la función polinómica P que cumple las siguientes condiciones simultáneamente:

$resto\left(P(x):(x+2)\right)=0$ $\quad C^+(\text{P})=\left(1,3\right)\cup\left(3,+\infty\right)$ $\quad resto\left(P(x):x\right)=-2$ $\quad gr(P)=5$

34. Sean los polinomios $T(x)=x^5+4x^4+4x^3$ y $Q(x)=x^5-2x^4+4x^3-6x^2+3x$, se pide:

a) Expresar los polinomios T y Q como producto de polinomios primos, sabiendo que 1 es una raíz doble de Q.
b) Proponer un polinomio mónico J de grado 3, divisor de Q, cuya única raíz real sea 0.
c) Dar la expresión factorizada de un polinomio M, que verifique simultáneamente las siguientes condiciones:
   i. $C^+(M)=C^+(Q)$ ii. $C^-(M)=C^-(T)$ iii. El grado de multiplicidad de las raíces de M es menor a 3. iv. gr (M) = 7

35. Dar la expresión de un polinomio primo divisor de $R(x)=x^3-x^2+2x-2$ y $S(x)=x^4-2x^2-8$ simultáneamente.

36. Escribir la expresión de tres funciones polinómicas mónicas de grado 4, cuyo conjunto de positividad sea: $C^+(N)=\mathbb{R}-\{3\}$.

37. Escribir la expresión de una función f polinómica mónica que cumpla simultáneamente:

i) $gr(f)=4$ ii) $C^+(f)=\mathbb{R}-\{-4\}$ iii) $f(0)=32$

38. Hallar la función polinómica: $P(x)=L(x).C(x)$ si se sabe:

- L: función lineal, cuyo gráfico forma en el con los ejes coordenados en el segundo cuadrante un triángulo de área 1.
- C: función polinómica de grado 2.
- $C^0(P)=\{-1;3;4\}$
- $V_C \in L$ (V_C : vértice de la parábola C)

RESPUESTAS

1. a) Sí b) No c) No d) No

3. a) cociente: $3x+8$ resto: $23x-20$ b) cociente: $3x$ resto: $-3x-5$ c) cociente: $\frac{1}{3}x+\frac{5}{9}$ resto: $-\frac{32}{9}x+5$ d) cociente: $x+\frac{3}{2}$ resto: $\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}$ e) cociente 2x – 5 resto: 8x - 1

4. a) cociente: $x^2+8x+22$ resto: 67 b) cociente: x^3-x^2+x-1 resto: - 1 c) cociente: $3x^2+x+4$ resto: - 9

6. 0

7. a =-5 b = 2

9. a) P es divisible por Q (el resto es 0) b) P no es divisible por Q. (el resto es 20)

10. a = -2 o a = 7/2

11. a = -74

12. a = 5 b = -5

13. -22

15. b) $Q(x)=-\frac{1}{3}(x+1)(x-2)(x-3)$ d) $Q(x)=x^2-2x$

19. a) x+1 es un factor de P c) $C^0(P)=\{-2;-1;3\}$ d) $P(x)=2(x+2)(x+1)(x-3)$ e) Q divide a P.

23. $P(x)=(x-1)(x^2+5)$

26 a) $(x-1)(x+2)$ b) $-3(x+3)(x-5)$ c) $\frac{5}{3}(x-1)(x+3)$ d) $x(x+1)(x+2)$ e) $x^2(x-2)(x+3)$ f) $(x-2)(x+2)$ g) $3\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$ h) $\frac{1}{2}x^2\left(x^2+\frac{1}{2}\right)$ i) $3x^2(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)$ j) $8x^2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ k) $3x^2\left(x^2+3\right)$ l) $(x+1)\left(x^2-x+1\right)$ m) $(x-2)\left(x^2+2x+4\right)$ n) $x(x-1)\left(x^2+x+1\right)$ o) $(x-2)(x+2)(x+1)\left(x^2-x+1\right)$ p) $(x+1)(x-2)(x+2)$ q) $(x-1)(x+2)\left(x^2-2x+4\right)$ r) $-3x(x+1)(x-2)(x+2)$ s) $(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)$ t) $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$ u) $2\left(x^2+4\right)\left(x^2+3\right)$ v) $(x-2)(x+1)\left(x^2+2x+4\right)\left(x^2-x+1\right)$ w) $4x\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$ x) $(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)$ y) $x(x-1)(x+4)$ z) $O(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(x+2)$ aa) $Q(x)=(x-1)^2(x+2)^2$ bb) $M(x)=3\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$ cc) $T(x)=3\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x^2+1\right)^2$

27. $A(x)=(x+2)(x-1)(x-3)$ $B(x)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)(x-3)$ $C(x)=(x+4)(x-3)(x-2)^2$ $D(x)=3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-5)(x-1)$ $I(x)=2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+2)(x+1)(x-1)$

28. C^+(h)=$(-\infty,-5)$ C^+(m)=$(-\infty;-3)\cup(-3;-2)\cup(1;+\infty)$ C^+(g)=$\left(-3;\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$

$C^+(f)$=$\mathbb{R}$-$\{1;2\}$

29. $S=(-5;-3)\cup\left(\frac{1}{2};2\right)$

30. a) $(-5;181)$ $(1;7)$ b) $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{8}\right)$ $\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{8}\right)$ $\left(-3;-\frac{57}{2}\right)$

31. a) $S=(-\infty;-2]\cup\left[0;\frac{1}{2}\right]$ b) $S=(-\infty;-3]\cup[0;2]$ c) $S=(-\infty;-3]\cup\left[\frac{1}{2};3\right]$ d) $S=\left(-\frac{3}{2};0\right)\cup(0;1)$ e) $S=(-\infty;3]$

32. $B:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\,B(x)=a(x+2)^2(x-1),\quad a\in\mathbb{R}^-$

33. $P(x)=\frac{1}{18}(x-1)(x+2)^2(x-3)^2$

34. a) $T(x)=x^3(x+2)^2$ $Q(x)=\left(x^2+3\right)(x-1)^2$ b) $J(x)=x\left(x^2+3\right)$

35. x^2+2

37. $f(x)=\left(x^2+2\right)(x+4)^2$

38. $P(x)=-72(x+1)(x-3)(x-4)$