Matemática

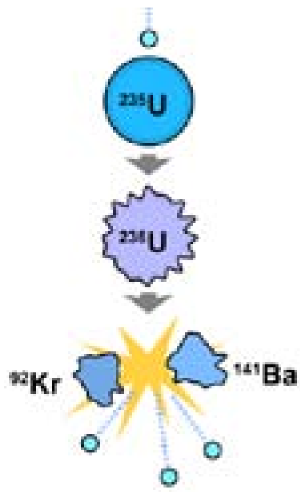
Unidad 3. Funciones

Prof. M. Ríos

FUNCIÓN EXPONENCIAL

SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

Situación Problemática Inicial 1



Al bombardear un átomo de uranio con neutrones, su núcleo de divide en dos núcleos más livianos, liberando energía y 3 neutrones. Bajo ciertas condiciones, es decir, si existe una masa crítica[1] de uranio, se inicia una reacción en cadena: cada uno de los tres neutrones chocan al núcleo de otro átomo, al que dividen en dos núcleos, liberando en cada choque gran cantidad de energía y 3 neutrones, y así sucesivamente.

Construimos una tabla de valores para la función que relaciona la cantidad de neutrones liberados en cada choque, con el número de choque y al choque, o momento inicial, con el neutrón que bombardea el primer átomo.

N° de choque	Cantidad de neutrones
0	$1 = 3^0$
1	$3 = 3^1$
2	$9 = 3^2$
3	$27 = 3^3$

1 Masa crítica de uranio es la cantidad de masa mínima que se necesita para mantener una reacción en cadena.

4	$81 = 3^4$
x	3^x

Por lo tanto, la expresión que modeliza la función en esta situación es:

$$f(x) = 3^x \text{, con } x \in \mathbb{N}.$$

Situación Problemática Inicial 2

Un fósil contiene una masa de carbono 14 que es una sustancia radiactiva, igual a un gramo. Después de un período de aproximadamente 6000 años, llamado período de semidesintegración, la masa radiactiva se reduce a la mitad ya que la otra mitad se fue desintegrando en forma continua a lo largo de ese período.

Al cabo de otro período similar queda solo la mitad de la mitad anterior y así sucesivamente.

Construimos una tabla con los valores de la masa M de carbono 14 que permanece inalterable después de 0,1,2,3,..., t períodos.

Tiempo medido en períodos de 6000 años (t)	**Masa de carbono 14 medida en gramos. (M)**
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$
3	$\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$
t	$\left(\frac{1}{2}\right)^t$

Por lo tanto, la expresión que modeliza la función de esta situación es:

$$M(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t \text{, con } t \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

FUNCIÓN EXPONENCIAL

Las situaciones iniciales muestran ejemplos que para modelizarlas y resolver problemas de este tipo, necesitamos las funciones llamadas EXPONENCIALES.

> *La <u>FUNCIÓN EXPONENCIAL</u> está definida como una función* $f: \Re \to \Re$ *que verifica que* $f(x) = y = a^{x}$, *donde* $a>0$ y $a \neq 1$.

¿Por qué son necesarios estos requerimientos?

- *Si* $a = 0$, 0^{x} *, no está definida para valores negativos de "x", por ejemplo,* 0^{1} *no está definida porque implicaría la división por cero.*
- *Si* $a < 0$, a^{x}*, no estaría definida para valores tipo* $x = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$, *siendo* $\frac{p}{q}$ *una fracción irreducible con denominador par. Por ejemplo:*

  $$(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2} \notin \Re$$

- *Si* $a = 1$, $1^{x} = 1$ *, para todo valor de x por lo tanto es la función constante e igual a* 1.

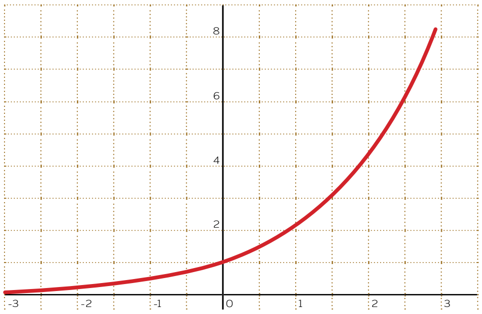
<u>Las funciones exponenciales se utilizan como modelos matemáticos en:</u>

- *El crecimiento de la población humana, animal o vegetal.*
- *El crecimiento del capital ingresado a un banco.*
- *El cambio en el peso de un animal o la altura de una planta.*
- *La desintegración de sustancias radiactivas.*
- *El enfriamiento de un cuerpo.*

GRÁFICOS DE FUNCIONES EXPONENCIALES

Para iniciar el estudio del gráfico de funciones exponenciales, se tiene en cuenta que hay dos posibilidades según la base de la función tome valores mayores o menores que la unidad.

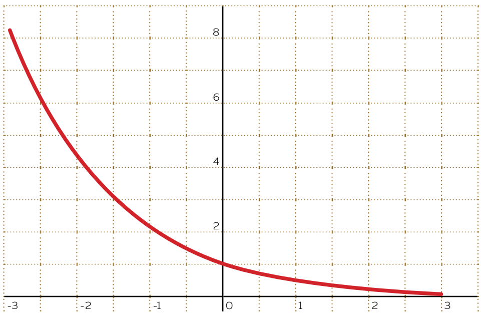
EJEMPLO *El gráfico de la función $f(X)=2^x$ es:*



En base al gráfico podemos deducir las siguientes propiedades comunes a todas las funciones exponenciales de este tipo:

- *La ordenada al origen es el punto (0 , 1).*
- *No tiene intersección con el eje de abscisas (eje x).*
- *El dominio son todos los números reales.*
- *La imagen son los números reales positivos.*
- *Es una función creciente.*

En cambio, el gráfico de la función: $f(X)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ *es*



En base al grafico podemos deducir las siguientes propiedades comunes a todas las funciones exponenciales de este tipo:

- *La ordenada al origen es el punto (0 , 1).*
- *No tiene intersección con el eje de abscisas (eje x).*
- *El dominio son todos los números reales.*
- *La imagen son los números reales positivos.*
- *Es una función decreciente.*

EJEMPLO RESUELTO

Recordando las propiedades de la potenciación, resolvemos algunas ecuaciones exponenciales para utilizarlas en las funciones exponenciales.

1) $3^{x-1} = 9 \Rightarrow$

$3^{x-1} = 3^2 \Rightarrow$

$x - 1 = 2 \Rightarrow$

$x = 3$

2) $5^{x+2} + 3.5^{x+1} - 8 = 0 \Rightarrow$

$5^x.5^2 + 3.5^x.5 - 8 = 0 \Rightarrow$

$5^x.(25 + 15) - 8 = 0 \Rightarrow$

$5^x = \frac{8}{40} = \frac{1}{5} \Rightarrow$

$5^x = 5^{-1} \Rightarrow x = -1$

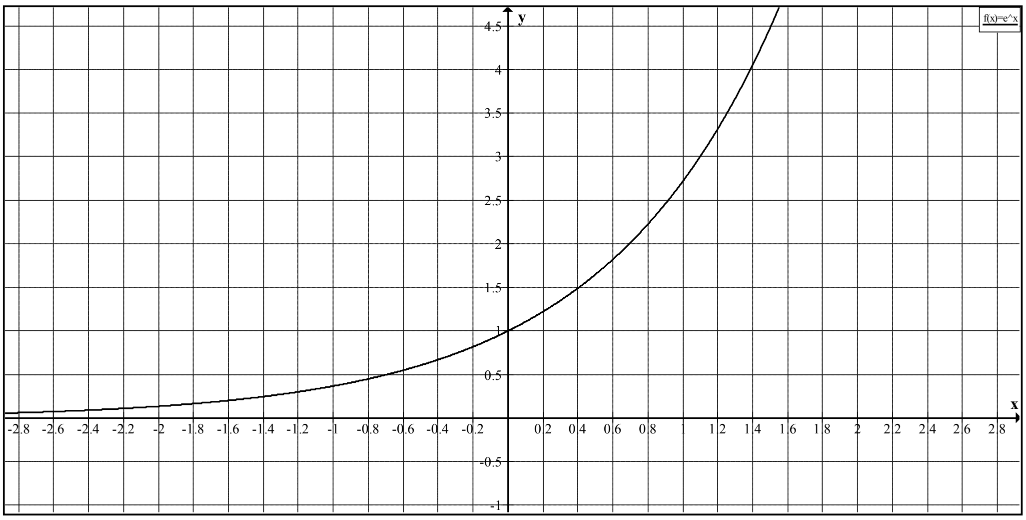
FUNCIONES EXPONENCIALES PARTICULARES

Hay dos funciones exponenciales que por su aplicación en procesos naturales, tienen particular interés:

La función exponencial de base decimal: $y = 10^x$.

La función exponencial de base "e" : $y = e^x$ $(e \approx 2{,}718)$

El gráfico siguiente corresponde a la función exponencial $y = e^x$.



FUNCIÓN LOGARÍTMICA

En la Situación problemática inicial 1 expuesta en el tópico Función Exponencial, respecto a la fisión nuclear, podría interesar la situación inversa. Es decir, por ejemplo, saber en qué número de choque fueron liberadas ciertas cantidades de neutrones.

En ese problema definimos el modelo de función que relaciona el número de choques con la cantidad de neutrones liberados como: $y = 3^x$ *, donde "y" es el número de choques y "x" es la cantidad de neutrones liberados.*

Por ejemplo, para $x = 4$*, el número de choques es* $y = 3^4 = 81$*.*

Cuando se trata de calcular el número de choques, conocida la cantidad de neutrones liberados, se dispone de la fórmula de la función exponencial, pero si se necesita saber la situación inversa, por ejemplo, el número de choque que corresponde a la liberación de 243 neutrones, por ensayo y error podemos "probar" que $x = 5$*, ya que* $243 = 3^5$ *.*

La función que modeliza la situación inversa a la exponencial se llama logarítmica y se define formalmente como:

FORMALIZANDO CONCEPTOS

La función $f : \Re^+ \to \Re$ ***: definida por*** $f(x) = \log_a x$ tal que $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$ ***con*** $a>0$ y $a \neq 1$***, un número real, se llama <u>FUNCIÓN LOGARÍTMICA</u> de base*** a.

En otras palabras, el logaritmo de un número es el exponente al que hay que elevar la base para obtener dicho número.

EJEMPLO RESUELTO

a) $2^7 = 128 \Leftrightarrow \log_2 128 = 7$

b) $8^{1/3} = 2 \Leftrightarrow \log_8 2 = \frac{1}{3}$

c) $\log_2 16 = y \Leftrightarrow 2^y = 16 \Leftrightarrow y = 4$

d) $\log_2 32 = y \Leftrightarrow 2^y = 32 \Leftrightarrow y = 5$

CAMBIO DE BASE

Las calculadoras solo obtienen logaritmos en base decimal o neperiano.

Los logaritmos decimales son los logaritmos de base 10 y cuya notación es $\log_{10} x = \log x$*, omitiendo la base.*

Los logaritmos neperianos tienen como base el número $e \cong 2{,}7182$ *y cuya notación es* $\log_e x = \ln x$

Entonces para calcular un logaritmo en otra base se realiza el cambio de base de la siguiente manera:

$$\boxed{\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}}$$

Por ejemplo:

$$\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = 1{,}5849$$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores, simbólicamente:

$log_a(x.y) = log_a\, x + log_a\, y,\quad para\ todo\ x > 0\ ,\ y > 0.$

Ejemplo numérico:

$log\,(4.8) = log\,(32) = 5$

$$\left.\begin{array}{l} log\ 4 = 2 \\ log\ 8 = 3 \end{array}\right\}\ 3 + 2 = 5$$

El logaritmo de un cociente es la resta del logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador. Simbólicamente:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base. Simbólicamente:

$$log_a\, x^y = y.log_a\, x$$

Estas propiedades servirán para resolver operaciones simplificando cálculos, teniendo en cuenta siempre que estamos utilizando las funciones logarítmicas como modelos para resolver ciertos problemas como los dados.

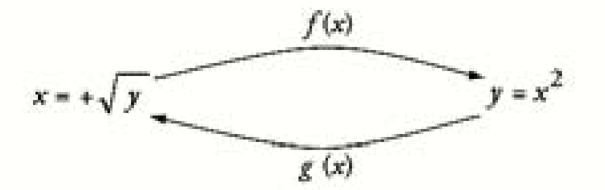
FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA ¿INVERSAS ENTRE SÍ?

Revisando la relación entre potencias y radicación, por ejemplo, para qué valor de x la función $f(x) = x^2$, toma el valor de 120. La respuesta surge al resolver la ecuación:

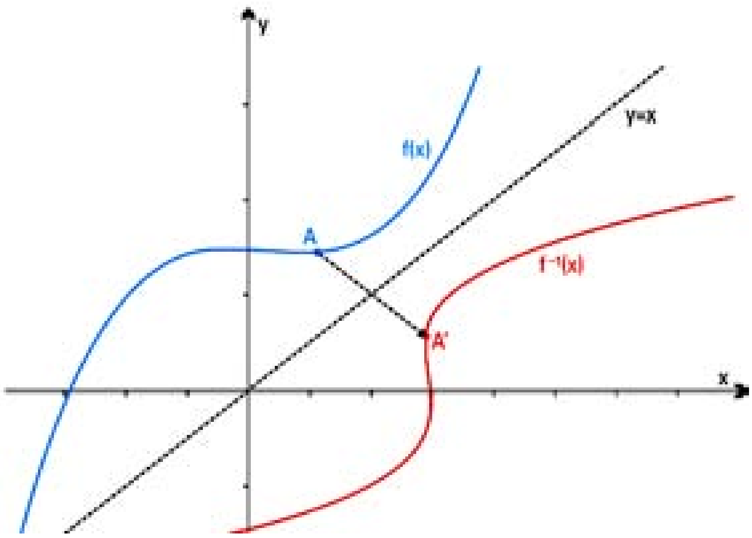
En este caso, la raíz cuadrada se define como la operación inversa de elevar al cuadrado un número.

$$x^2 = 120 \Rightarrow x = \sqrt{120}$$

En este caso, la raíz cuadrada se define como la operación inversa de elevar al cuadrado un número.



Es una característica de las funciones inversas que sus representaciones gráficas son simétricas respecto a la bisectriz[2] del primer cuadrante, tal como se muestra en la gráfica siguiente.



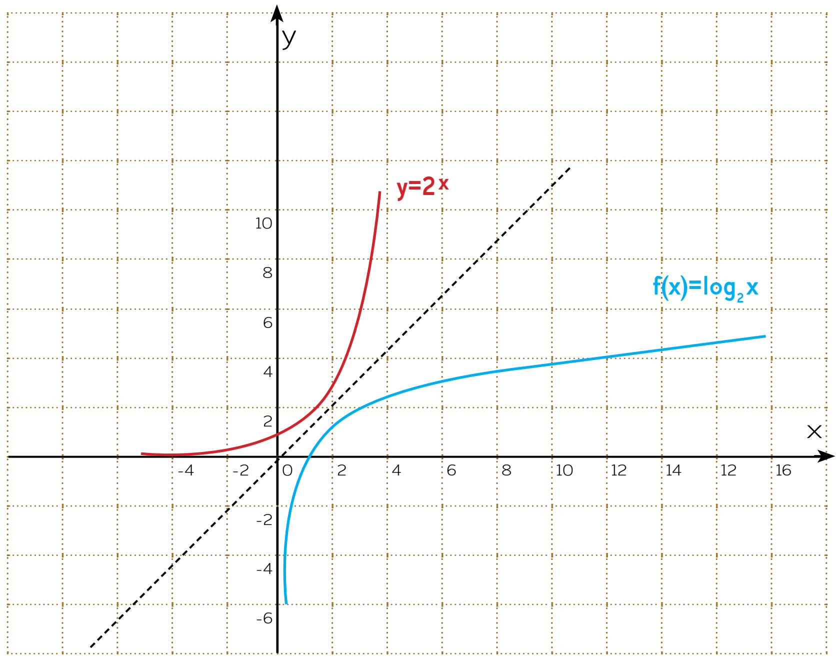
Las funciones exponencial y logarítmica son inversas ya que por sus propias definiciones

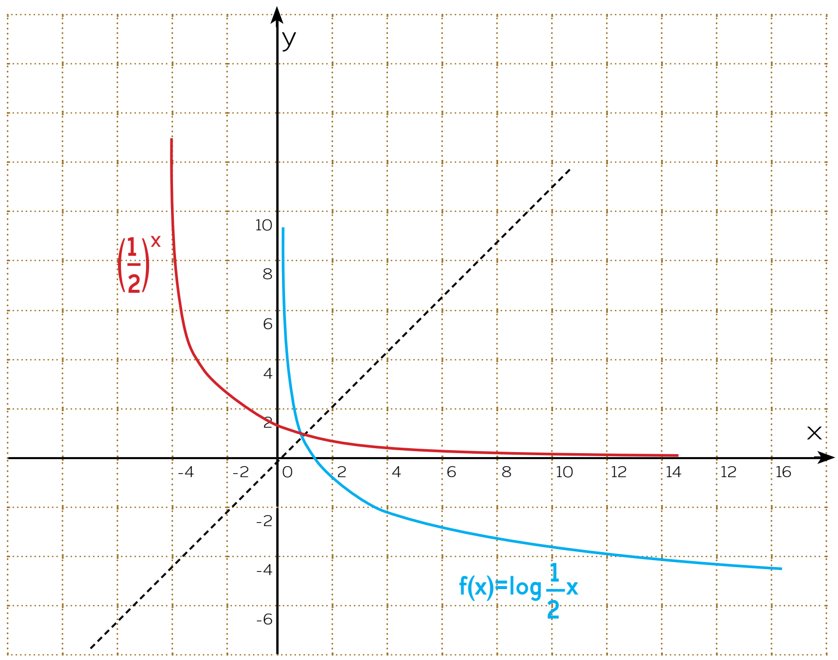
$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

2 Recta bisectriz del primer cuadrante es la recta que divide al ángulo recto formado por los sentidos positicos de los ejes x e y en dos ángulos iguales de 45°.

GRÁFICOS DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Como la función exponencial es la función inversa, se muestran ambas funciones para comprobar que son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante.





EJEMPLO RESUELTO

EJEMPLO 1

Resolver la ecuación $3^{x+2} = 9^{2x-1}$.

Aplicamos logaritmo de base 3 *a ambos miembros, entonces:*

log$_3{}^{3x+2}$ = *log*$_3 9^{2x-1}$, *luego por la propiedad mencionada antes de logaritmos, en la cual el logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente de la potencia por el logaritmo de la base,*

$$(x+2).\log_3 3 = (2x-1).\log_3 9$$
$$(x+2)\ 1 = (2x-1)\ 2$$
$$x+2 = 4x-2 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

EJEMPLO 2

Resolver log $(x+3)$ + *log* $(x) = 1$

$$\log((x+3)(x)) = 1$$
$$\log(x^2+3x) = 1$$
$$10^1 = x^2+3x$$
$$x^2+3x-10 = 0 \Rightarrow x_1 = -5; x_2 = 2$$

Ahora bien, de estas dos posibles soluciones, sólo verifica $x = 2$, *ya que el valor negativo no verifica la ecuación original. Por lo tanto la solución de la ecuación dada es* $x = 2$.

ACTIVIDAD

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

1) Isaac Newton (1641–1727) encontró experimentalmente que la velocidad a la cual se enfría un objeto en un ambiente que tiene menor temperatura es proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la temperatura del ambiente. Si T(t) es la temperatura el cuerpo en el instante t, el modelo propuesto por Newton, conocido como Ley de Enfriamiento de Newton, es:

$T(t) = T_d.e^{-kt} + T_{amb}$, donde para el instante *t* el valor de T_{amb} es la temperatura constante del ambiente. La constante *k* indica la rapidez de enfriamiento y depende del objeto.

Una taza de café que sacamos del horno a microondas a una temperatura de 93° C se coloca en una habitación cuyo ambiente se encuentra a una temperatura de 21° C. El modelo planteado por la Ley de enfriamiento de Newton para esta situación es $T(t) = 72.e^{-0,0425.t} + 21$, con *t* medido en minutos y T(t) en °C.

a) ¿Cuál es la temperatura del café después de 15 minutos de haber sacado la taza del microondas? ¿Y después de media hora?

b) Graficar utilizando las propiedades generales de estas funciones exponenciales y estimar la temperatura mínima que alcanzará el café, independientemente del tiempo transcurrido?

2) Un elemento radiactivo que decae en su crecimiento después de un tiempo t, responde a la fórmula $f(t) = 60.2^{-0,02.t}$.

a) ¿Cuál es la cantidad de este elemento al inicio del proceso?

b) ¿Qué cantidad queda después de 500 años?

c) ¿Qué cantidad queda después de 1000 años?

d) ¿Qué cantidad queda después de 2000 años?

3) El valor de reventa de una máquina dentro de la fábrica se comporta conforme a la función: $V(t) = 5000.e^{-0,1.t}$, donde t son los años transcurridos desde la compra original.

a) ¿Cuál es el valor original del equipo?

b) ¿Cuál es el valor al que se podrá vender, después de conservarlo por 5 años?

4) Un problema relevante en estudios oceanográficos es determinar la cantidad de luz que penetra a distintas profundidades del océano. La ley de Beer Lambert describe, utilizando un modelo exponencial, la energía lumínica E que llega a una profundidad de m metros. Para un océano determinado, la función que representa la situación es: $E(m) = 10.0,4^x$,

donde la energía lumínica E se mide en $\frac{cal}{cm^2.s}$ y x en metros.

a) ¿Qué energía lumínica se tiene a 2 metros?

b) ¿Es la energía creciente o decreciente con la profundidad? Justificar.

c) Graficar en forma aproximada la función y a partir de ésta analizar qué ocurre si se llega a más de 10 metros de profundidad y a más de 30 metros de profundidad.

5) Graficar y analizar dominio, imagen, intervalos de crecimiento o decrecimiento de las siguientes funciones exponenciales:

a) $y = 3^x$ b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ c) $y = 3.2^x$

d) $y = 3^x - 2$ e) $y = -3^x$

6) Una sustancia radiactiva se desintegra de acuerdo a la fórmula $r(t) = k.e^{-7t}$, donde k es una constante. ¿En cuánto tiempo habrá exactamente un tercio de la cantidad inicial?

7) Una población de bacterias crece de acuerdo a la fórmula $B(t) = k.e^{c.t}$ donde c y k son constantes y B(t) representa el número de bacterias en función del tiempo. En el instante t=0 hay 10^6 bacterias. ¿En cuánto tiempo habrá 10^7 bacterias si en 12 minutos hay 2.10^6 bacterias?

8) La intensidad del sonido que percibimos en nuestro oído tiene diferentes niveles. Un modelo para determinar el nivel de intensidad percibido I_p, medido en decibeles, que corresponde a la intensidad del sonido producido I es: $I_p = 10.\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, donde es el valor del sonido más débil que puede ser detectado por nuestros oídos en determinadas condiciones.

a) Encontrar la intensidad del sonido percibido si I tiene 10 veces más intensidad que I_0 .

b) Encontrar la intensidad del sonido percibido si I tiene 1000 veces más intensidad que I_0.

9) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\log_5 25 + \log_2\left(\frac{1}{4}\right) = x$

b) $\log 1000 + x = \left(-\frac{1}{3}\right)\log_2\left(\frac{1}{2}\right)$

c) $(\log_7 49)^2 = \log_2 x$

d) $5^x = 28$

e) $e^{x/3} = 14{,}8$

f) $3^{x-2} = 8$

g) $2^{3x+1} = 5^{2x-7}$

h) $\log_4 (2x + 3) - 2\log_4 x = 2$

i) $\log_3 (2x - 3) + \log_3 (x^2 + 3x) = 2$

j) $\log_x\left(\frac{2x}{3}\right) + \log_x 3 - \frac{1}{4}\log_x\left(x^{-4}\right) = x^0 + \log_x 2$

k) $\log_2 (x + 2) - \log_2 8 = \log_2 3 - \log_2 x$

l) $\log x + \log (x - 200) - \log 4 = 5 - \log 5$

10) Un material radioactivo que se utiliza en reactores nucleares tiene un decaimiento que se modeliza por la función $P(t) = P_0.e^{-0{,}000248.t}$ donde P_0 es la cantidad inicial de material radioactivo. Calcular el tiempo en que la cantidad de material radioactivo es la mitad que la cantidad inicial.

11) El valor de reventa V de un equipo para plasma se comporta conforme a la función: $V(t) = 5000.e^{-0{,}1.t}$, donde t son los años transcurridos desde la compra original.

a) ¿Cuál es el valor original del equipo?

b) ¿Cuántos años tuvo el dueño el equipo en su poder si al venderlo obtuvo sólo $1800?

FUNCIONES POLINÓMICAS

Para introducirnos al tema de las funciones polinómicas, propongo la resolución, guiada por el texto, de 3 situaciones problemáticas donde se aplican las herramientas que formalizaremos en las paradas teóricas siguientes.

SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

Situación Problemática Inicial 1

EL DEPÓSITO SUBTERRÁNEO

En una estación de servicio se debe construir un depósito subterráneo para instalar en él un tanque de combustible. Hay 3 modelos de tanque: chico, mediano y grande. Cada uno de ellos requiere un depósito de forma cúbica de arista igual a 1 m, 2 m. y 3 m respectivamente.

El depósito debe quedar enterrado en el suelo. Su parte superior, que es descubierta, estará al ras de la tierra. Su piso y sus 4 paredes se cubrirán con planchas de fibrocemento, y todas las junturas entre sus planchas irán selladas con unos listones de hierro.

La empresa dispone de hasta $ 6500 para construir el depósito. Los costos son los siguientes: $ 400 por metro cúbico excavado, $ 120 por metro cuadrado de plancha de fibrocemento y $ 40 por metro lineal de listón de hierro. Además hay que agregar $ 170 en concepto de flete.

¿Cuál de los tres depósitos puede construirse con ese presupuesto? Para saberlo, hay que averiguar una fórmula para el costo de construcción, en función de la arista x del depósito, en metros.

Completar la guía:

Por un lado tenemos el flete, cuyo costo es de $ .... constantes.

Como el depósito es cúbico, todas las aristas son ....; entonces el volumen del depósito en metro cúbico es: V = x. x.x = ...

El costo del metro cúbico excavado es de $ 400; por lo tanto el costo total del volumen excavado es C = $ ....

El depósito tiene un total de .... caras para cubrir con las planchas de fibrocemento. La superficie de cada plancha en metro cuadrado es: S = x.x = ... El costo del metro cuadrado de fibrocemento es de $ 120; entonces el costo de una plancha es C = $ ....y el costo de todas las planchas es de CT = $ ....

El depósito tiene un total de .... junturas entre todas sus caras. El costo del metro lineal de cada listón de hierro es de $ .... Un listón que cubre una juntura cuesta: C = $ ...., y el costo de todos los listones es : CL= $ ....

Completar resumiendo:

GASTOS	COSTO
Flete	170
Listones de hierro	
Planchas de fibrocemento	
Excavación	
Costo total	

La empresa podrá construir el depósito que albergue el tanque de ....

Situación Problemática Inicial 2

¿CUÁNTAS CALORÍAS NECESITAMOS?

Los nutricionistas estudian cuántas calorías necesitamos para desarrollar nuestra actividad diaria normal. Para ello, elaboran tablas y gráficos. La tabla que muestra la cantidad de calorías que necesitamos en función de nuestra edad es:

Edad (años)	0	5	12,5	15	20
Calorías	30	60	52	54	42

Hace dos siglos, el matemático Lagrange desarrolló un polinomio interpolador que permite "fabricar" una función polinómica que pase por los puntos que se desee. Por ejemplo, con los datos de la tabla, la función polinómica

a) Utilizar dicha función para calcular la cantidad de calorías para un chico de 14 años.

b) Calcular las calorías que requiere un bebé de 6 meses.

c) Calcular la cantidad de calorías que necesita una persona de su edad (considerar años y meses).

FUNCIONES POLINÓMICAS

Las funciones que se utilizaron en la modelización de los problemas anteriores están formado por uno o más términos; cada uno de los cuales se los suele llamar ***MONOMIOS****. Cuando la función está formada por varios términos, a la expresión se la suele llamar* ***FUNCIÓN POLINÓMICA****. El grado de la función polinómica es el mayor exponente que tiene la variable.*

Completar la siguiente tabla indicando de cuántos MONOMIOS (términos) están formados los siguientes POLINOMIOS (funciones):

FUNCIÓN POLINÓMICA	*Número de monomios*	*Grado de la función polinómica*
$f(x) = X^3 - 2X + 1$		
$f(x) = X^5 + 3X^7 - 3 + 3X$		
$f(x) = X$		
$f(x) = 4$		

Así como operamos con los números reales para simplificar y obtener resultados, debemos operar con las funciones que modelizan las situaciones problemáticas que utilizamos para resolver las mismas. Por lo tanto, es necesario revisar los procedimientos que facilitan dichas operaciones, como la suma algebraica, la multiplicación y división de funciones.

Por ejemplo: en la función polinómica $\boxed{f:\Re \to \Re \,/\, f(x) = 4x^5 + 3x^4 - 2x^3 - \frac{1}{2}x + 1}$

Se tiene:

- *Grado: 5*
- *Coeficientes con los términos ordenados por grado:* 4 , 3 , -2 , $-\frac{1}{2}$ *y* 1.
- *Coeficiente principal:* 4
- *Término independiente:* 1

OPERACIONES ENTRE FUNCIONES POLINÓMICAS

Suma algebraica de funciones polinómicas

La suma o resta de dos funciones polinómicas da por resultado una nueva función polinómica obtenido de sumar o restar los términos semejantes (de igual grado).

Por ejemplo, dadas las funciones polinómicas $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2x - 1$ *y*

$g(x) = x^4 + 7x^2 + 5x + 2$

$$f(x) + g(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2x - 1 + x^4 + 7x^2 + 5x + 2 = 2x^5 + x^4 + 4x^2 + 7x + 1$$

$$f(x)-g(x)=2x^5-3x^2+2x-1-(x^4+7x^2+5x+2)=2x^5-x^4-10x^2-3x-3$$

Multiplicación de funciones polinómicas

Cuando se multiplican dos funciones polinómicas, el resultado es otra función polinómica cuyo grado es igual a la suma de los grados de las funciones polinómicas y cuyos términos se obtienen de aplicar la propiedad distributiva entre los términos de ambas funciones.

EJEMPLO

Dadas las funciones $f(x) = 3x^4 - 2x$ *y* $g(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3$*, calculamos* $f(x).g(x)$ *de la siguiente manera:*

$$\underline{f(x).g(x)}=(3x^4-2x)(2x^3-2x^2+3)=3x^4.2x^3+3x^4.(-2x^2)+3x^4.3-2x.2x^3-2x.(-2x^2)-$$

$$-2x.3=6x^7-6x^5+9x^4-4x^4+4x^3-6x=\underline{6x^7-6x^5+5x^4+4x^3-6x}$$

División de funciones polinómicas

Para el caso que las funciones estén formadas por un solo término o monomio, se dividen los coeficientes entre sí y las variables por otro lado, recordando las propiedades de la potenciación.

EJEMPLO

$$\frac{x^5}{x^3}=x^2 \qquad \frac{x^6}{x}=x^5 \qquad \frac{x^2}{x^5}=x^{-3}=\frac{1}{x^3}$$

Recordemos el algoritmo de la división entre números reales, por ejemplo:

$$\begin{array}{l|l} 7 & 2 \\ \hline 1 & 3 \end{array}$$

En este caso, el número 7 es el dividendo, 2 es el divisor y el número 1 es el resto.
Se verifica que $7 = 3.\,2 + 1$

Un concepto que tenemos que tener en cuenta para dividir funciones polinómicas es el de raíz o cero de una función, el cual recordamos es el valor de la variable independiente que anula la función.

Simbólicamente:

"a" es raíz de la función $P(x)$ si y sólo si $P(a) = 0$.

EJEMPLO

$x = 1$ *es raíz de* $P(x) = x^5 - x^3$.

$x = -1$ *es raíz de* $P(x)$. *Pero* $x = 2$ *no es raíz de* $P(x)$.

Dada una función polinómica P(x), dividendo, D(X) el divisor distinto de la función nula, el cociente C(X) y R(x) el resto, donde el grado de R(X) es menor que el grado de D(x), entonces:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & D(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array}$$

Por lo tanto, se verifica también el algoritmo de la división:

$$\boxed{P(x) = D(x) \cdot C(x) + R(x)}$$

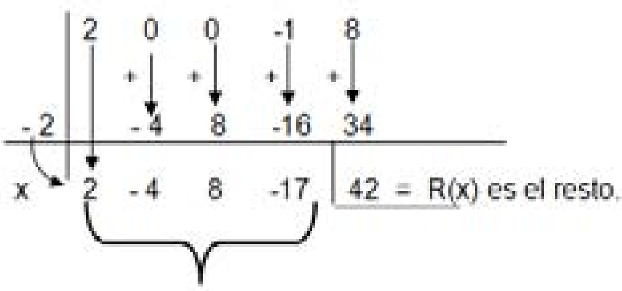
Cuando el divisor es un polinomio de la forma (x – a), siendo a un número real, se simplifica el proceso utilizando la regla de Ruffini.

Por ejemplo: $P(x) = 2x^4 - x + 8$; $Q(x) = x + 2$

Primero escribimos en una fila los coeficientes del dividendo completo y ordenado, según las potencias decrecientes de la variable:

$$2 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 8$$

Luego se traza una cruz como indica la figura, y en el ángulo izquierdo se escribe el opuesto del término independiente del divisor, o bien, la raíz del divisor.



Los números resultantes en este lugar son los coeficientes, ordenados y completos del cociente, con un grado menor que el dividendo.

Por lo tanto, la función polinómica cociente de la división entre las funciones dadas es: $C(x) = 2x^3 - 4x^2 + 8x - 17$ y el resto es $R(x) = 42$.

Una manera de saber si una función polinómica es divisible por otra, sin realizar la división, cuando el divisor tiene la forma de $Q(x) = x - \mathrm{a}$, es utilizar el

Teorema del Resto

> ***El resto de la división de un polinomio por otro de la forma x + a , es el valor que resulta de reemplazar la variable del dividendo por el valor opuesto al término independiente del divisor.***

EJEMPLO

En el ejemplo anterior, donde $P(x) = 2x^4 - x + 8$; $Q(x) = x + 2$
haríamos: $P(-2) = 2\,(-2)^4 - (-2) + 8 = 42$, lo que verifica el resto hallado cuando realizamos la división utilizando el método practico de Ruffini.

ACTIVIDAD

FUNCIONES POLINÓMICAS

1) Dadas las siguientes funciones polinómicas, efectuar las operaciones indicadas:

$P(x) = -2x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x + 3$ $\quad Q(x) = 3x - 4 + \frac{1}{2}x^3 - 2x^2$ $\quad R(x) = x^2 - 5x + 2$

a) $P(x)+Q(x)$ b) $P(x)+R(x)$

c) $P(x)-Q(x)$ d) $R(x)-Q(x)$

Es recomendable graficar las funciones dadas utilizando software matemático, con la operación resultante para visualizar los resultados.

2) Dadas las siguientes funciones polinómicas, efectuar las operaciones indicadas:

$P(x)=2x^2$ $Q(x)=x^4+1$ $R(x)=x^3-2x$ $S(x)=3x^2+x+1$

a) $P(x).Q(x)$ b) $P(x).R(x)$ c) $P(x).S(x)$ d) $Q(x).R(x)$
e) $Q(x).S(x)$

3) Resolver las siguientes divisiones entre funciones polinómicas:

a) $\dfrac{6x^3-12x^2+3x}{-3x}$ b) $\dfrac{\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^4+\frac{1}{4}x^3-2x^2}{\frac{1}{2}x}$

c) $\dfrac{x^4-15x^3+9x^2-\frac{6}{5}x}{\left(-\frac{3}{5}x\right)}$ d) $\dfrac{-6x^4+\frac{3}{2}x^3-2x^2}{3x^2}$

4) Calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones entre funciones polinómicas verificando:

1) $\dfrac{2x^3+5x^2-x-5}{x+2}$ 2) $\dfrac{5x^2-3x+4}{x-3}$ 3) $\dfrac{2x^3+3x-1}{x-2}$

4) $\dfrac{-24x-x^4+5}{x+3}$ 5) $\dfrac{3x^3-2x^2-2}{x+1}$ 6) $\dfrac{-x^5+12x^3-15x^2-16}{x+4}$

Para verificar se realiza al algoritmo de la división:
DIVIDENDO = DIVISOR x COCIENTE + RESTO

5) Utilizando el teorema del resto, calcular el mismo en las divisiones del ejercicio anterior, verificando los resultados. En el caso de ser divisibles (resto igual a cero), expresar (factorizar) el polinomio dividendo en función del cociente y el resto, logrando la simplificación del mismo.

DIVIDENDO = DIVISOR X COCIENTE

6) Se localizó un globo atmosférico a cierta altura. A partir de ese momento, su altura sobre el nivel del mar se puede describir, en forma aproximada, por la función: $h(x) = 8 + \frac{1}{16}\left(x^3 - 12x^2 + 47x - 60\right)$, donde x es medido en días y h en miles de metros.

a) ¿A qué altura estaba el globo cuando fue localizado?

b) ¿Alcanzó otra vez esa altura?

c) Se sabe que al tercer día alcanzó una altura de 800 metros. ¿Llegó en algún otro momento a esa misma altura?

7) El desplazamiento lateral de una barra de choques, t segundos después del momento en que un vehículo la golpea, está dado por $f(t) = k.t(t-3)^2$.

a) Hallar el valor de k sabiendo que dos segundos después del impacto, el desplazamiento lateral es de 40 cm.

b) Para ese valor de k , hallar los ceros o raíces de la función f(t).

8) De una larga pieza de hoja de lata de 25 cm. de ancho se va a hacer un desagüe para lluvia, doblando hacia arriba sus orillas para formar sus lados. Expresar el área de la sección transversal del canalón para lluvia como función de su altura.

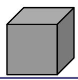
FACTORIZACIÓN DE FUNCIONES POLINÓMICAS

SITUACIÓNES PROBLEMÁTICAS

Situación Problemática Inicial

En una fábrica de dispositivos electrónicos, se decidió envasar los productos en dos modelos de cajas con iguales volúmenes. Una de ellas debe ser un cubo y la otra un prisma cuyos ancho sea igual al del cubo, su profundidad sea el doble y su altura, 4 cm menor. ¿Cuáles son las medidas exactas de cada una de las cajas, con estos requerimientos del departamento de marketing?

Completamos la tabla, para organizar la información y modelizar con funciones el volumen de cada caja:

Modelo		Ancho	Profundidad	Altura	Volumen
Cubo		x	x	x	x^3
Prisma		x	$2.x$	$x-4$	$x.2x(x-4) =$ $= 2x^3 - 8x^2$

Como los volúmenes de ambos modelos se pueden representar con funciones polinómicas, igualamos ambas funciones:

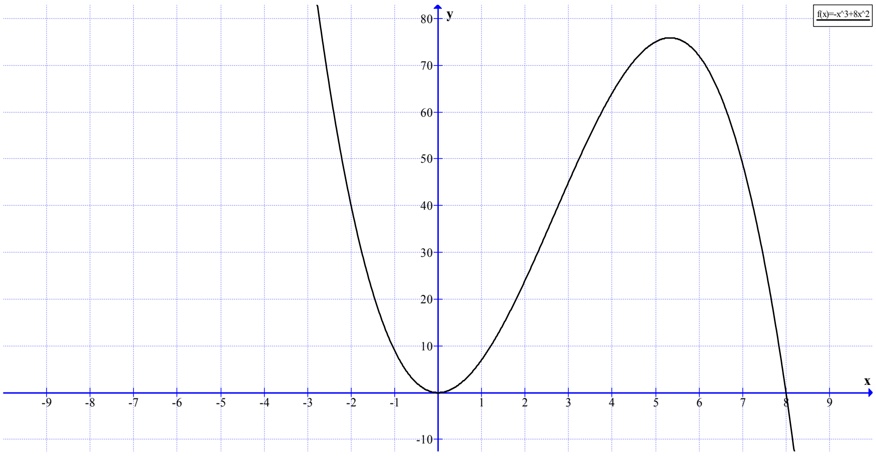
$$x^3 = 2x^3 - 8x^2$$

Agrupamos los términos

$$x^3 - 2x^3 + 8x^2 = 0$$
$$-x^3 + 8x^2 = 0$$

Por lo tanto, para encontrar el valor del ancho de las cajas, habría que calcular las raíces de la función polinómica $V(x) = -x^3 + 8x^2$.

El primer método que podemos usar es el de graficar la función utilizando software matemático, tal cual se propone a lo largo de todo el módulo. Por ejemplo, en este caso:



Se observa que una de las raíces es el cero y la otra es el 8.

Por lo tanto, las dimensiones del cubo será de 8 cm de arista, y la del prisma será de 8 cm de ancho, 16 cm de profundidad y 4 cm de altura.

Otra manera sería probar con la calculadora hasta encontrar, al menos aproximadamente, el valor que anula la función polinómica.

La metodología exacta para resolver cálculos y simplificar funciones polinómicas se conoce como **FACTORIZACIÓN**.

Es el proceso con el cual se obtienen analíticamente, las raíces de las funciones polinómicas.

Para ello, el objetivo es encontrar las raíces, expresando a la función polinómica como producto de funciones irreducibles.

EJEMPLO RESUELTO

EJEMPLO 1

Dadas las siguientes funciones polinómicas:

$$p(x) = 7x^5 + 5x^4 + x^3 = x^3(7x^2 + 5x + 1)$$

$$q(x) = 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 = 2x^2(x^2 - 3x + 2)$$

$$r(x) = -4x^7 - 8x^3 + 4x^2 + 16x = 4x(-x^6 - 2x^2 + x + 4)$$

El procedimiento consiste en extraer la variable x, común en todos los términos, que se encuentra elevada a la menor de sus potencias y de extraer el número que es factor de todos los coeficiente.

Para verificar que la factorización es correcta, en estos casos, se puede probar realizando la distributiva y volver a la función original.

EJEMPLO 2

Dadas las siguientes funciones polinómicas:

$$p(x) = x^2 - 25 = (x - 5)\ (x + 5)$$

$$q(x) = x^4 - 9x^2 = (x^2)^2 - (3x)^2 = (x^2 - 3x)\ (x^2 + 3x)$$

$$r(x) = x^2 - 6 = x^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2 = (x - \sqrt{6})\ (x + \sqrt{6})$$

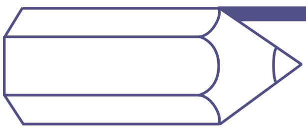
Las funciones dadas tienen la forma $x^2 - a^2$*, lo que se puede expresar como:*

$$x^2 - a^2 = (x + a).(x - a)$$

EJEMPLO 3

Volviendo a la función polinómica que modeliza el volumen de las cajas de la fábrica:

$V(x) = -x^3 + 8x^2 = x^2.(-x + 8)$, *entonces* $x = 0$ *o* $x = 8$*, lo que confirma lo hallado anteriormente.*



ACTIVIDADES INTEGRADORAS

1) Graficar las siguientes funciones lineales:

$a)\ y = x + 2$ $b)\ y = -x - 2$ $c)\ y = 2x - 3$ $d)\ y = -2x$

$e)\ y = \frac{1}{2}x - 2$ $f)\ y = -\frac{2}{3}x + 3$

2) Si $s(t) = 3t + 2$ describe el espacio recorrido por un móvil que se desplaza con M.R.U, (t en segundos y s en metros) determinar:

a) El espacio recorrido a los 5 segundos, a los 10 segundos y a los 25 segundos.

b) La ecuación que describe el espacio recorrido por otro móvil que se desplaza a igual velocidad y que está 2 metros adelantado con respecto al primero.

c) La ecuación que describe el espacio recorrido por otro móvil que se desplaza al doble de velocidad y en el instante $t = 0$ se encuentra en el mismo punto que el primero.

3) Las ganancias $f(x)$ obtenidas por la venta de x tn de un cereal están dadas por la ecuación $f(x) = 250\,x + 150$. Obtener:

a) Las ganancias al vender 15 tn, 50 tn y 2000 tn.

b) ¿Cuántas toneladas es necesario vender para obtener una ganancia de $500.000?

4) Resolver analítica y gráficamente los sistemas:

$a)\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 2x + 7y = 25 \end{cases}$ $b)\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 2 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 7 \end{cases}$ $c)\begin{cases} 4x + 2y = 3 \\ 3x = 2 \end{cases}$

$d)\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{4}{5} \end{cases}$ $e)\begin{cases} x + 2y = 9 \\ 3x + 6y = 27 \end{cases}$ $f)\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 10x + 4y = 3 \end{cases}$

5) Graficar las siguientes funciones:

$a)\ y = x^2$ $b)\ y = -2x^2$

$e)\ y = x^2 + 3x$ $f)\ y = -x^2 + x$

$h)\ y = 2x^2 + 6x - 1$ $i)\ y = -x^2 - x + \frac{3}{4}$

$c)\ y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ $d)\ y = -x^2 + 2$

$g)\ y = x^2 + 4x - 5$

6) El rendimiento de nafta r en km/litro de un automóvil está relacionado con la velocidad v (en km/h) por la función $r(v) = -\frac{1}{400}v^2 + \frac{2}{5}v \quad ; 0 < v < 160$

a. Hallar la velocidad para la cual el rendimiento es máximo y calcular dicho rendimiento.

b. ¿Para qué valores de v aumenta el rendimiento? ¿Para qué valores disminuye?

c. Graficar.

6) Un sistema formado por un monitor y gabinete de CPU cuesta \$ 1823,50. Se sabe que la cuarta parte del valor del monitor más la mitad del valor del gabinete dan un total de \$ 764,4375. ¿Cuál es el costo del monitor y del gabinete? Justificar mediante el planteo de un sistema de ecuaciones y su resolución.

7) La curva de beneficio total de los productores de trigo está dada por: $B(x) = -2x^2 + 106x - 300$ donde x representa el precio de cada unidad demandada. ¿Qué precio maximizará el beneficio total? Graficar la curva que corresponde al beneficio.

8) Un repuesto de una máquina cuesta hoy \$8000 y se devalúa (pierde su valor) linealmente hasta llegar a \$200 en 20 años.

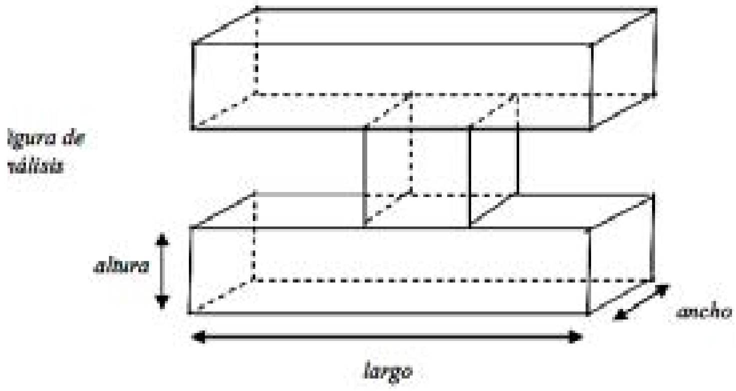
a. Escribir el modelo (fórmula) lineal del valor de la pieza en función del tiempo indicando con claridad el significado que usted le da a las variables en juego.

b. Graficar en un sistema cartesiano.

c. Calcular con el modelo encontrado cuanto tiempo tarda en anularse el valor de la pieza y en cuánto tiempo pierde el 10 % de su valor original.

9) Se desea construir una letra para un cartel de marquesina formando la letra como muestra la figura, de modo tal que la base sea un prisma en el cual el largo es 6 unidades mayor que la altura y el ancho es dos unidades mayor que la altura. La columna del medio es un cubo en el cual la longitud de la arista es igual a la del ancho de la base. La parte de arriba es un prisma igual al de la base.

Hallar la expresión algebraica que representa el volumen del cuerpo



10) Se lanza una red de pesca hacia arriba y describe una forma parábolica siguiendo el modelo matemático siguiente: $h(t) = -5.t^2 + 20.t + 10$, donde h(t) representa la altura que alcanza la red en función del tiempo t en segundos.

a) Graficar la función.

b) ¿En qué tiempo alcanza la altura máxima y cuál es la misma?

11)En una laguna se introdujeron 100 truchas. Al principio el cardumen empezó a crecer rápidamente pero después de un tiempo, los recursos de la laguna comenzaron a escasear y la población decreció. Si el número de truchas N(t) a los t años está dado por $N(t) = -t^2 + 21t + 100$.

a) Calcular la cantidad de años que transcurrieron para que la población alcance su número máximo. ¿Cuál es la máxima población?

b) Si ocurre, ¿cuándo se extinguen?

12) El número Q de miligramos de una sustancia radiactiva que restan después de t años está dado por: $Q(t) = 100.e^{-0,035t}$.

a) Calcular la cantidad de miligramos que hay después de 10 años.

b) ¿En qué tiempo habrá 20 mg.?

13) La población de una ciudad está dada por la función: $P(t) = 10000.e^{0,032t}$ donde t es el número de años transcurridos desde 1980.

a) Calcular la cantidad de habitantes en 1996.

b) ¿En qué año, su población era el triple que en 1980?

14) Resolver las ecuaciones exponenciales:

a) $2^{x+3} = 16$

b) $5^{x-2} + 5^{x+3} = 3126$

d) $e^{2x} + e^{x} - 2 = 0$

e) $\log_2 x = 5$

g) $\log_x 2 + \log_x 6 - \log_x 3 = 2$

c) $4^{x} + 2^{x} = 20$

f) $\log_{x^2} 12 - 2\log_{x^2} 2 = \frac{1}{2}$

h) $(\log x)^2 = \log x^2$

15) Graficar las funciones e indicar dominio, imagen, intervalos de crecimiento y decrecimiento:

a) $y = 2^{x} + 2$

b) $y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$

c) $y = \log_2 x + 1$

d) $y = \log_3 (x - 2)$

16) Resolver:

a) $3.2^{x+3} - 12 = 0$

b) $-4^{x+1} + 8 = 0$

c) $121.11^{x-2} = 3.11^{x} - 22$

d) $7^{-1}.7^{2-x} - \frac{3}{7^{x}} = 196$

e) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}}{2} - 5.2^{-x} = -128$

f) $9^{x} + 3^{x} = 90$

g) $2^{x} + 4^{x} + \frac{1}{4} = 0$

h) $e^{2x} - 3e^{x} + 2 = 0$

i) $\sqrt[x+1]{27} = \sqrt[3x]{9}$

j) $\sqrt{8^{2x-1}} = \sqrt[3]{2^{x+2}}$

k) $\sqrt[4]{25^{x+1}.625^{-x}} = 5^{\frac{1}{2}}$

l) $\log_2 (2x + 2) - \log_2 (-x + 2) = 2$

m) $\log_3^2 (x - 1) + \log_3 (x - 1) = 6$

n) $\log_2 \sqrt{x} - \log_2 \sqrt[8]{x^3} = \log_2 2^{1/4}$

ñ) $\log x^4 - 2\log x + \log_{1/3} 9 = 0$

o) $3\log_4 (x + 4) - \log_4 (x + 4) = 2$

p) $\log_2 [\log_2 (x - 1)] = 1$