

# **COMPOSICIÓN**

## **DE**

# **FUNCIONES**

# COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

La composición es una operación entre funciones que se establece de la siguiente manera:

Dadas dos funciones  $f$  y  $g$ , se define como la composición de la función  $f$  con la función  $g$ , a la función denotada  $f \circ g$  (léase  $f$  composición  $g$ ), cuya regla de correspondencia es

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

donde su dominio está representado por el conjunto

$$D_{f \circ g} = \{ x \mid x \in D_g ; g(x) \in D_f \}$$

Para obtener la regla de correspondencia de la función  $f \circ g$ , según la definición anterior, basta con sustituir la función  $g$  en la variable independiente de la función  $f$ .

Así por ejemplo, sean las funciones  $f(x) = 4x^2 - 1$  y  $g(x) = \sqrt{x}$ , entonces, la regla de la función  $f \circ g$  se obtiene mediante la siguiente sustitución

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] , \text{ por lo que}$$

$$(f \circ g)(x) = f[\sqrt{x}] , \text{ entonces}$$

$$(f \circ g)(x) = 4x - 1$$

Del mismo modo resolvamos el siguiente ejemplo:

Escribir en el paréntesis la letra de la columna de la derecha que corresponda a la regla de correspondencia de la composición indicada, para

$$f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = \sqrt{x} \quad y \quad h(x) = \frac{1}{x-1}$$

1).-  $(f \circ g)(x) = \dots\dots\dots ( \quad )$       **a)**  $\sqrt{x^2 + 1}$

2).-  $(g \circ h)(x) = \dots\dots\dots ( \quad )$       **b)**  $x + 1$

3).-  $(h \circ g)(x) = \dots\dots\dots ( \quad )$       **c)**  $\frac{1}{\sqrt{x} - 1}$

4).-  $(g \circ f)(x) = \dots\dots\dots ( \quad )$       **d)**  $\sqrt{x^2 + 2}$

5).-  $(f \circ h)(x) = \dots\dots\dots ( \quad )$       **e)**  $\frac{1}{x}$

**f)**  $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

**g)**  $\sqrt{x+1}$

Para entender mejor cómo se obtiene el dominio y el recorrido de la composición, recurramos a la notación funcional, pues la definición se expresa en estos términos.

**Notación Funcional.-** Es una simbología que sirve para representar sucintamente una función, se expresa de la siguiente manera

$$y = w(x)$$

Donde:

$w$  Representa la regla de correspondencia de la función.

$x$  Indica el dominio de la función  $w$ , o bien, a la variable independiente.

$w(x)$  Representa al recorrido de la función  $w$ , indica los valores de la variable dependiente.

Entonces, en estos términos, el significado de

$$f[g(x)]$$

Es que el dominio de la función resultante, es un subconjunto, propio o impropio, del dominio de la función  $g$ , y que su recorrido es un subconjunto propio o impropio de la función  $f$ .

De lo anterior, es importante tener presente que la condición para que se pueda efectuar esta operación es el cumplimiento de

$$R_g \cap D_f \neq \emptyset$$

A partir de la condición anterior, indicar si es posible o no obtener la composición entre las funciones que se indican:

Si:

$$g(x) = -x^2$$

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

$$h(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$i(x) = \sqrt{1-(x-2)^2}$$

$$j(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$k(x) = \sqrt{-x}$$

Entonces:

**a)**  $f \circ g$  ; no es posible

**b)**  $g \circ f$  ; sí es posible

**c)**  $i \circ h$  ; no es posible

**d)**  $h \circ i$  ; sí es posible

**e)**  $j \circ k$  ; sí es posible

**f)**  $k \circ j$  ; no es posible

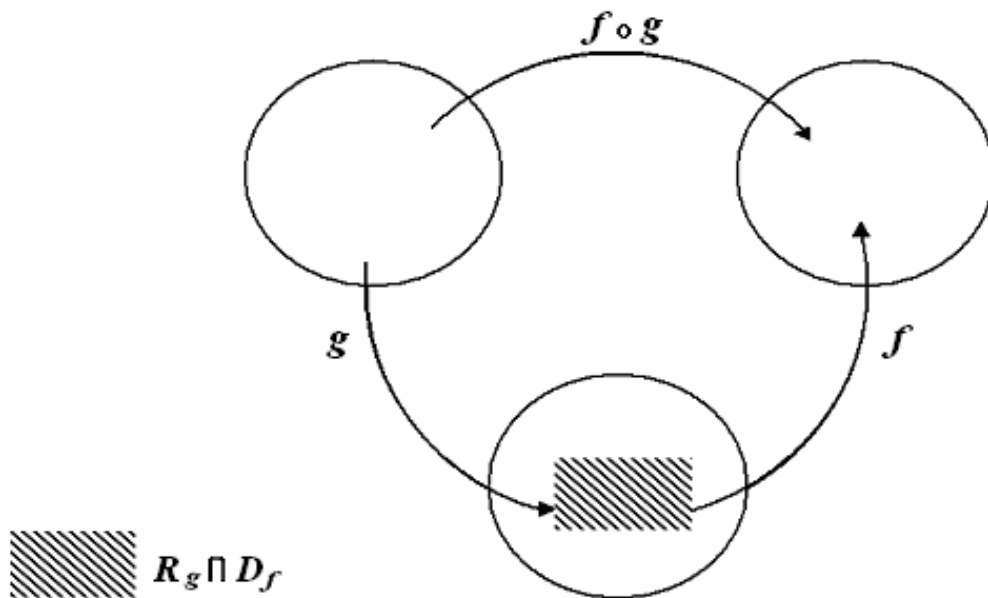
**g)**  $k \circ g$  ; sí es posible

**h)**  $g \circ k$  ; sí es posible

**i)**  $f \circ j$  ; sí es posible

**j)**  $i \circ g$  ; no es posible

Para visualizar mejor cómo se obtiene el dominio y el recorrido de la función composición  $f \circ g$ , recurramos a su representación en un diagrama de Venn.

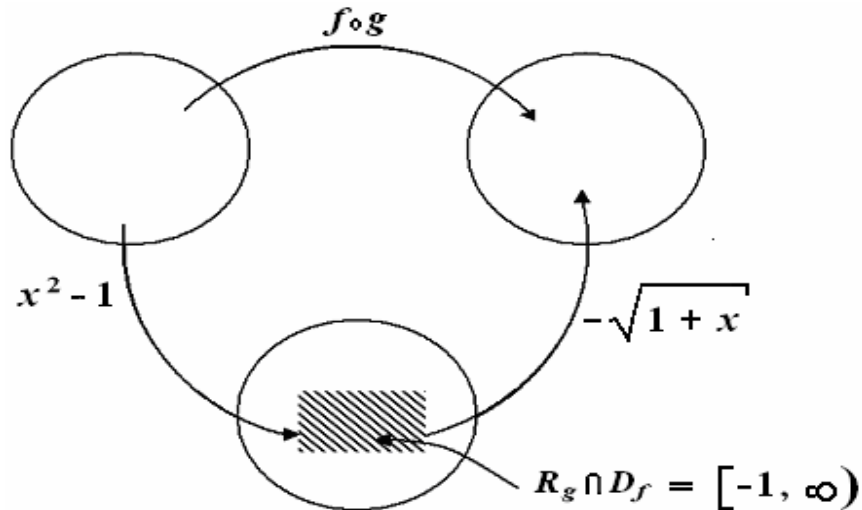


Podemos ver que el  $D_{f \circ g}$  ( dominio de  $f \circ g$  ) lo formarán aquellos elementos del  $D_g$  para los cuales, al sustituirlos en la función  $g$ , el resultado pertenece al conjunto  $R_g \cap D_f$ .

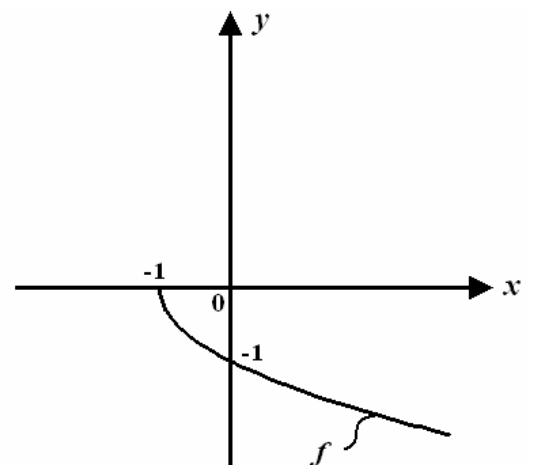
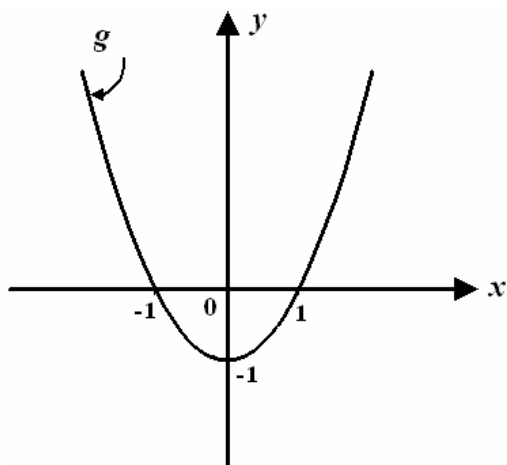
Para obtener el  $R_{f \circ g}$  ( recorrido de  $f \circ g$  ), analizamos los valores que obtenemos de la función  $f$ , cuando la valuamos en todos los elementos del conjunto  $R_g \cap D_f$ .

**Ejemplo.-** Si  $f(x) = -\sqrt{1+x}$  y  $g(x) = x^2 - 1$ , obtener la función  $f \circ g$ , y trazar su gráfica.

Si hacemos la representación correspondiente en un diagrama de Venn



Si además trazamos las gráficas de las funciones involucradas:



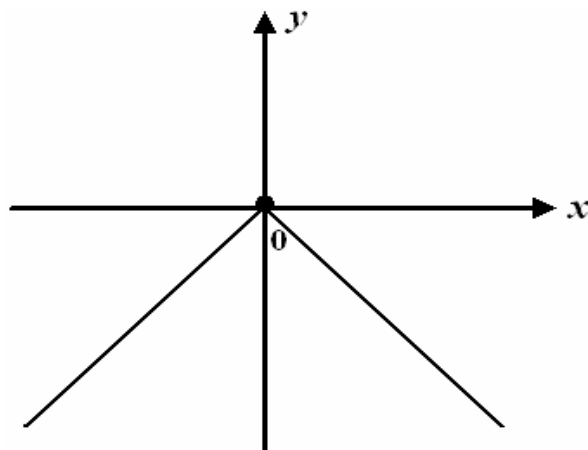
El  $D_{f \circ g}$  lo formarán aquellos elementos del  $D_g$  tales que al valuarlos en la función  $g$ , se encuentren en el conjunto  $[-1, \infty)$ . Podemos darnos cuenta que ese conjunto es  $\mathbb{R}$ .

El  $R_{f \circ g}$  estará formado por aquellos valores que se obtienen de sustituir en la función  $f$ , los elementos del conjunto  $[-1, \infty)$ . El resultado de esta sustitución es el conjunto  $(-\infty, 0]$

Al obtener la regla de correspondencia de la función  $f \circ g$  queda

$$f[g(x)] = f[x^2 - 1] = -\sqrt{1 + (x^2 - 1)} = -\sqrt{x^2}$$

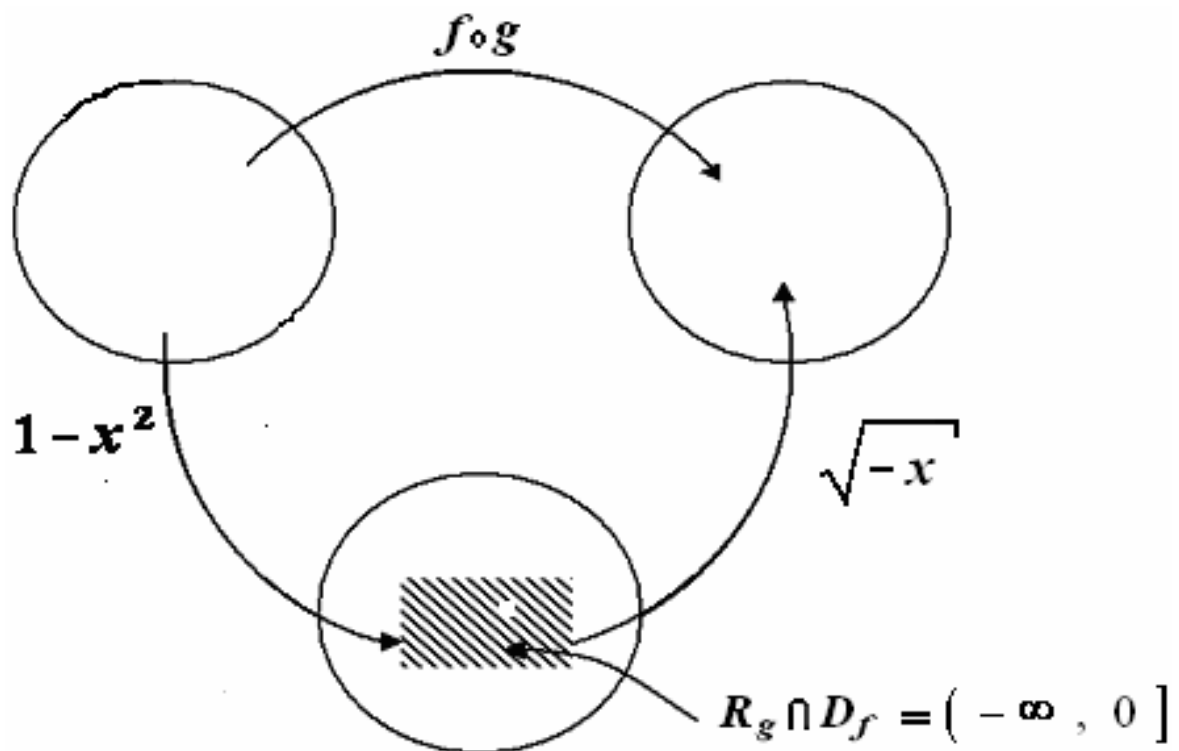
De lo analizado antes, concluimos que la regla de correspondencia de la función  $f \circ g$  no puede ser  $-x$ , sino  $-\sqrt{x^2}$  cuya gráfica será.





**Ejemplo.-** Si  $f(x) = \sqrt{-x}$  y  $g(x) = 1 - x^2$ , obtener la función  $f \circ g$ , y trazar su gráfica.

Si hacemos la representación en un diagrama de Venn.



Sea

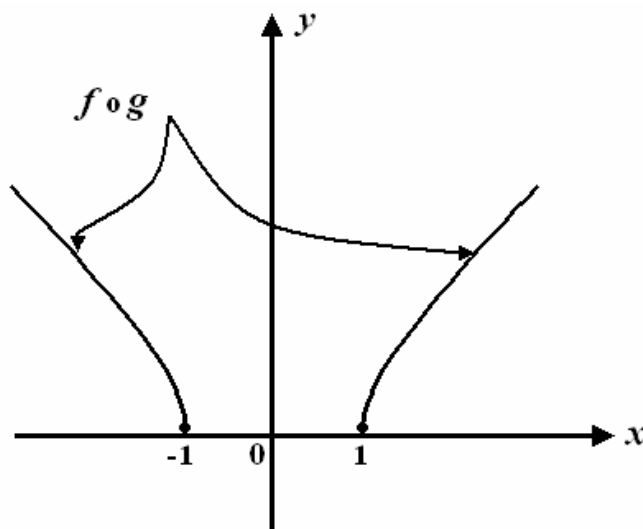
$$R_g \cap D_f = (-\infty, 0]$$

El dominio de  $f \circ g$  lo formarán aquellos elementos del dominio de  $g$  tal que al sustituirlos en ella, se obtienen  $(-\infty, 0]$ ; vemos que esos elementos son  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ .

El recorrido de  $f \circ g$  estará formado por todos los valores que se obtienen al sustituir cada elemento del conjunto  $(-\infty, 0]$  en la función  $f$ ; el resultado que se obtiene es  $[0, \infty)$ .

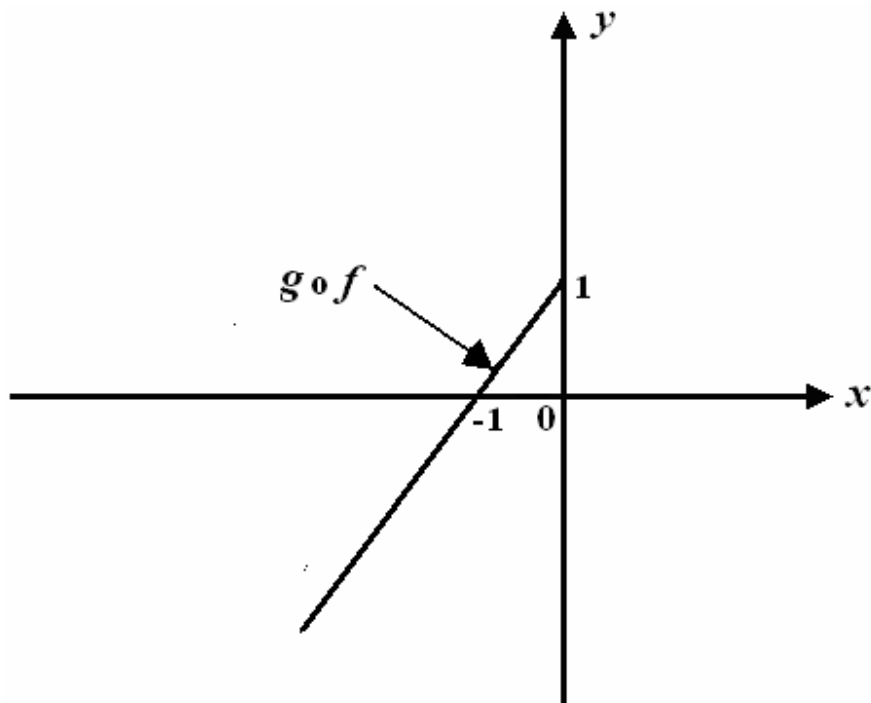
La regla de correspondencia de la función  $f \circ g$  está dada por

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = [1 - x^2] = \sqrt{x^2 - 1}, \text{ cuya gráfica es:}$$



**Ejemplo.-** Para las funciones del ejercicio anterior obtener  $g \circ f$ , así como trazar su gráfica.

Sea  $R_f \cap D_g = [0, \infty)$ , entonces el  $D_{g \circ f} = (-\infty, 0]$  y el  $R_{g \circ f} = (-\infty, 1]$ , entonces  $(g \circ f)(x) = g[\sqrt{-x}] = 1 + x$  cuya gráfica es



Como se puede observar la operación composición no cumple la conmutatividad

$$f \circ g \neq g \circ f$$

salvo casos particulares.